WWW.TOANMATH.COM

Sử dụng phương pháp đánh giá để giải hệ phương trình.

I. Lý thuyết

Các bất đẳng thức quan trọng

- Bất đẳng thức Cosi.

Với n số thực không âm $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ ta có

$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n \ge n\sqrt[n]{a_1.a_2.a_3..........a_n}$

Dấu bằng xảy ra khi $a_1 = a_2 = a_3 = ... = a_n$

- Bất đẳng thức Bunhiacoxky

Với 2 bộ sô $(a_1;\ a_2;...;a_n)$ và $(b_1;\ b_2;...;b_n)$ ta có:

$\left(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2\right) \ge \left(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n\right)^2$

Dấu bằng xảy ra khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ... = \frac{a_n}{b_n}$.

- Bất đẳng thức Svacxo.

Với $b_1, b_2...b_n > 0$ ta có: $\frac{a_1^{\ 2}}{b_1} + \frac{a_2^{\ 2}}{b_2} + \frac{a_3^{\ 2}}{b_3} ...... + \frac{a_n^{\ 2}}{b_n} \ge \frac{\left(a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n\right)^2}{b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_n}$.

Dấu bằng xảy ra khi: $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = ... = \frac{a_n}{b_n}$.

Các bất đẳng thức phụ cần ghi nhớ.

- Với $a, b > 0$ ta có: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \ge \frac{4}{a+b}$. Dấu bằng xảy ra khi $a = b$.
- Với $ab \ge 1$ thì $\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \ge \frac{2}{1+ab}$. Với $ab \le 1$ thì bất đẳng thức đổi chiều.

  Dấu bằng xảy ra khi $a = b = 1$

II. Các Ví dụ và bài tập tự luyện.

Ví dụ 1: (Đề tuyển sinh đại học khối A- 2014)

Giải hệ phương trình sau $\begin{cases} x\sqrt{12-y} + \sqrt{y\left(12-x^2\right)} = 12 \\ x^3 - 8x - 1 = 2\sqrt{y-2} \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $-2\sqrt{3}\le x\le 2\sqrt{3};\quad 2\le y\le 12$

Với 2 số thực a,b bất kỳ ta có: $(a-b)^2\ge 0\Leftrightarrow \dfrac{a^2+b^2}{2}\ge ab$

Áp dụng ta được: $\begin{cases} x\sqrt{12-y}\le \dfrac{x^2-y+12}{2} \\ \sqrt{y(12-x^2)}=\sqrt{y}.\sqrt{12-x^2}\le \dfrac{12-x^2+y}{2} \end{cases}$

Nên $x\sqrt{12-y}+\sqrt{y(12-x^2)}\le 12$ do đó: $(1)\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ y=12-x^2 \end{cases}$

Thay vào (2) ta được: $x^3-8x-1=2\sqrt{10-x^2}\Leftrightarrow x^3-8x-3+2\left(1-\sqrt{10-x^2}\right)=0$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left[x^2+3x+1+\frac{2(x+3)}{1+\sqrt{10-x^2}}\right]=0 \quad (3)$$

Do $x\ge 0\Rightarrow x^2+3x+1+\dfrac{2(x+3)}{1+\sqrt{10-x^2}}>0$ khi đó $(3)\Leftrightarrow x=3\Rightarrow y=3$(Thỏa mãn)

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $(x;y)=(3;3)$

Ví dụ 2: Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1+2x^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+2y^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{1+2xy}} & (1) \\ \sqrt{x(1-2x)}+\sqrt{y(1-2y)}=\dfrac{2}{9} & (2) \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{Z})$

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} 0\le x\le \dfrac{1}{2} \\ 0\le y\le \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Áp dụng bất đẳng thức bunhiacopxky ta có:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1+2x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+2y^2}}\right)^2\le 2\left(\frac{1}{1+2x^2}+\frac{1}{1+2y^2}\right) \quad (*)$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \sqrt{1+2x^2}=\sqrt{1+2y^2}\Leftrightarrow x=y$

Ta lại có:

$$\frac{1}{1+2x^2}+\frac{1}{1+2y^2}-\frac{2}{1+2xy}=\frac{2(x-y)^2(2xy-1)}{(1+2x^2)(1+2y^2)(1+2xy)}\le 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+2x^2}+\frac{1}{1+2y^2}\le\frac{2}{1+2xy}\quad (**)$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=y$.

Từ $(*)$ và $(**)$ ta suy ra

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1+2x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+2y^2}}\right)^2\le\frac{4}{1+2xy}\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{1+2x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+2y^2}}\le\frac{2}{\sqrt{1+2xy}}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=y$. Khi đó $(1)\Leftrightarrow x=y$ thế xuống phương trình (2) ta được:

$$\sqrt{x(1-2x)}+\sqrt{x(1-2x)}=\frac{2}{9}\Leftrightarrow x=\frac{9\pm\sqrt{73}}{36}\Rightarrow y=\frac{9\pm\sqrt{73}}{36}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là: $(x;y)=\left(\frac{9\pm\sqrt{73}}{36};\frac{9\pm\sqrt{73}}{36}\right)$

Ví dụ 3: Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^3-3x+2=y^3+3y^2\\ \sqrt{x-2}+\sqrt{x^3-3x^2+y+2}=x^2-3y\end{cases}$

Lời giải

Nhận xét: Nhìn vào phương trình đầu của hệ ta có cảm giác ngay là sử dụng hàm số đại diện t^3-3t nhưng cần có điều kiện của biến. Ở đây biến muốn tìm điều kiện của biến y thì chúng ta cần suy ra từ phương trình 2 nhưng khó khan nên chúng ta phải nghĩ hướng khác. Ở đây chúng ta có thể phân tích thành nhân tử nên thử đi theo hướng đó xem sao.

Điều kiện: $\begin{cases}x\ge 2\\ x^3-3x^2+y+2\ge 0\end{cases}$

Ta có:

$$\text{PT}(1) \Leftrightarrow x^3 - 3x = (y+1)^3 - 3(y+1)$$
$$\Leftrightarrow x^3 - (y+1)^3 = 3(x-y-1)$$
$$\Leftrightarrow (x-y-1)\left[x^2 + x(y+1) + (y+1)^2\right] = 3(x-y-1)$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = x-1 \\ x^2 + x(y+1) + (y+1)^2 = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = x-1 \\ \frac{3}{4}x^2 + \frac{x^2}{4} + x(y+1) + (y+1)^2 = 3 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = x-1 \\ \frac{3}{4}x^2 + \left(\frac{x}{2} + y + 1\right)^2 = 3 \end{array}\right.$$

Với $x \geq 2 \Rightarrow \frac{3}{4}x^2 \geq 3$ mà $\left(\frac{x}{2} + y + 1\right)^2 \geq 0$ nên $\frac{3}{4}x^2 + \left(\frac{x}{2} + y + 1\right)^2 \geq 3$

Do đó $\frac{3}{4}x^2 + \left(\frac{x}{2} + y + 1\right)^2 = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ \frac{x}{2} + y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \end{cases}$ không thỏa mãn điều kiện.

Với $y = x - 1$ thế xuống phương trình (2) ta được:

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{x^3 - 3x^2 + x + 1} = x^2 - 3x + 3$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 + \sqrt{2} \\ \sqrt{x-2} + \sqrt{(x-1)(x^2 - 2x - 1)} = x^2 - 3x + 3 \quad (*) \end{cases}$$

Áp dụng bất đẳng thức cosi ta có:

$$\begin{cases} \sqrt{x-2} \leq \frac{x-1}{2} \\ \sqrt{(x-1)(x^2-2x-1)} \leq \frac{x^2 - x - 2}{2} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x-2} + \sqrt{(x-1)(x^2-2x-1)} \leq \frac{x^2-3}{2}$$

Mặt khác: $x^2 - 3x + 3 \geq \frac{x^2 - 3}{2} \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 \geq 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 \geq 0$

Khi đó $\text{VP}(*) \geq \text{VT}(*)$ nên $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 1 \\ x^2 - 2x - 1 = x - 1 \\ x \geq 1 + \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow y = 2$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $(x; y) = (3; 2)$

Ví dụ 4: Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x^2+xy+y^2}{3}}+\sqrt[3]{\dfrac{x^3+y^3}{2}}=2 \\ \sqrt{2-x}+\sqrt{2x+2}+xy=4 \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{Z})$

Lời giải

Điều kiện: $-1 \le x \le 2$

Ta có các bất đẳng thức sau:

$$\begin{cases} x^2+xy+y^2 \ge \dfrac{3}{4}(x+y)^2 \Leftrightarrow (x-y)^2 \ge 0 \\ x^3+y^3 \ge \dfrac{1}{4}(x+y)^3 \end{cases}$$

Khi đó ta suy ra:

$$2=\sqrt{\frac{x^2+xy+y^2}{3}}+\sqrt[3]{\frac{x^3+y^3}{2}} \ge x+y \Leftrightarrow x+y \le 2$$

Áp dụng bất đẳng thức cosi ta có: $\begin{cases} 2\sqrt{2-x} \le 3-x \\ 2.2\sqrt{2x+2} \le 2x+6 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{2-x}+\sqrt{2x+2} \le 3$

Và : $xy \le \dfrac{(x+y)^2}{4} \le 1$ khi đó thì: $\sqrt{2-x}+\sqrt{2x+2}+xy \le 4$

Dấu bằng xảy ra khi: $\begin{cases} x=y \\ 2-x=1 \\ 2x+2=4 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=1$

Thử lại vào hệ phương trình thỏa mãn.

Vậy nghiệm của hệ đã cho là: $x=y=1$

Ví dụ 5: Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{\sqrt{2x-1}}{x}+6y^2+8=3x+\dfrac{3}{x}+y^4+8y \quad (1) \\ 2x^3+3y+4=3x^2+6\sqrt{y} \quad (2) \end{cases}$

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} x \ge \dfrac{1}{2} \\ y \ge 0 \end{cases}$

Ta có: $(2) \Leftrightarrow 2x^3-3x^2+1=-3\left(\sqrt{y}-1\right)^2 \le 0$

Mà $2x^3-3x^2+1\ge 0\Leftrightarrow (2x+1)(x+1)^2\ge 0$ đúng với $x\ge \frac{1}{2}$

Do đó: $2x^3-3x^2+1\ge -3\left(\sqrt{y}-1\right)^2$ dấu bằng xảy ra khi $x=y=1$

Thay lại vào phương trình (1) thỏa mãn

Vậy nghiệm của hệ là: $x=y=1$

Ví dụ 6: Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x-y+2}+2\sqrt{y-x}=\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{x-y+4}}\\ x^3+\sqrt{2x-1}=2-\sqrt{y-2}\end{cases}\quad (x,y\in\mathbb{Z})$

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases}y\ge x\\ x-y+2\ge 0\\ x\ge \dfrac{1}{2}\\ y\ge 2\end{cases}$

Đặt $\begin{cases}\sqrt{y-x}=a\\ a\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow -a^2=x-y$

Biến đổi phương trình (1)

$$\sqrt{2-a^2}+2a=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{4-a^2}}\Leftrightarrow \sqrt{2-a^2}.\sqrt{4-a^2}+2a\sqrt{4-a^2}=3\sqrt{3}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{6-3a^2}.\sqrt{4-a^2}+2a\sqrt{3}.\sqrt{4-a^2}=9\quad (*)$$

Áp dụng bất đẳng thức cosi ta có:

$$\begin{cases}\sqrt{6-3a^2}.\sqrt{4-a^2}\le \dfrac{10-4a^2}{2}=5-2a^2\\ 2a\sqrt{3}.\sqrt{4-a^2}\le 2a^2+4\end{cases}\Rightarrow \sqrt{6-3a^2}.\sqrt{4-a^2}+2a\sqrt{3}.\sqrt{4-a^2}\le 9$$

Khi đó $(*)\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{4-a^2}=\sqrt{6-3a^2}\\ a\sqrt{3}=\sqrt{4-a^2}\end{cases}\Leftrightarrow a=1\Rightarrow y-x=1\Leftrightarrow y=x+1$

Thay xuống phương trình còn lại ta được

$$x^3+\sqrt{2x-1}=2-\sqrt{x-1}\Leftrightarrow x^3+\sqrt{2x-1}+\sqrt{x-1}-2=0$$

Xét hàm số: $f\left(x\right)=x^3+\sqrt{2x-1}+\sqrt{x-1}-2$

Ta có: $f'\left(x\right)=2x^2+\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}+\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}>0$ mà $f\left(1\right)=0$ nên $x=1$ là nghiệm duy nhất

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $x=1, y=2$.

Ở các Ví dụ trên chúng ta thấy chỉ sử dụng 1 phương trình của hệ để đánh giá. Chúng ta đi xét Ví dụ sau.

Ví dụ 7: Giải hệ phương trình $\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{4x^2+y}}+\dfrac{1}{\sqrt{4y^2+x}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2(x+y)^2+x+y}}\\ x\sqrt{y-1}+y\sqrt{x-1}=\dfrac{x^2+4(y-1)}{2}\end{cases}$.

(mathlinks.vn)

Lời giải

Điều kiện: $x\ge 1; y\ge 1$.

Khi đó sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta có

$$\frac{1}{\sqrt{4x^2+y}}+\frac{1}{\sqrt{4y^2+x}}\ge\frac{2}{\sqrt{\sqrt{\left(4x^2+y\right)\left(4y^2+x\right)}}}.$$

Suy ra

$$\begin{aligned}&\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2(x+y)^2+x+y}}\ge\frac{2}{\sqrt{\sqrt{\left(4x^2+y\right)\left(4y^2+x\right)}}}\\ &\Leftrightarrow 2\sqrt{\left(4x^2+y\right)\left(4y^2+x\right)}\ge 2\left(x+y\right)^2+x+y\\ &\Leftrightarrow 4\left(4x^2+y\right)\left(4y^2+x\right)\ge\left[2\left(x+y\right)^2+x+y\right]^2\\ &\Leftrightarrow 16x^2y^2+4(x^3+y^3)+xy\ge\left(x+y\right)^4+\left(x+y\right)^3+\frac{1}{4}(x+y)^2\\ &\Leftrightarrow\left(x-y\right)^2\left[\frac{1}{4}+x^2+y^2+6xy-3(x+y)\right]\le 0\\ &\Leftrightarrow\left(x-y\right)^2\left[\left(x+y\right)^2-3(x+y)+4xy+\frac{1}{4}\right]\le 0\Leftrightarrow x=y\end{aligned}.$$

Bởi vì với $x, y\ge 1$ ta có

$$\left(x+y\right)^2-3(x+y)+4xy+\frac{1}{4}\ge\left(x+y\right)^2-3(x+y)+4+\frac{1}{4}>0.$$

Thay $y=x$ vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$2x\sqrt{x-1}=\frac{x^2+4(x-1)}{2}$$
$$\Leftrightarrow x^2-4x\sqrt{x-1}+4(x-1)=0$$
$$\Leftrightarrow \left(x-2\sqrt{x-1}\right)^2=0 \Leftrightarrow x=2\sqrt{x-1} \Leftrightarrow x=2$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(2;2)$.

Ví dụ 8: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x-y=6(1-\sqrt{xy}) \\ x+\dfrac{6\sqrt{2(x^6+y^6)}}{x^2+xy+y^2}=3+\sqrt{2(x^2+y^2)} \end{cases}$ (mathlinks.vn)

Lời giải

Điều kiện: $xy>0$.

Ta có:

$$\frac{6\sqrt{2(x^6+y^6)}}{x^2+xy+y^2}=\frac{6\sqrt{2(x^2+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)}}{x^2+xy+y^2}\geq 2\sqrt{2(x^2+y^2)}.$$

Thật vậy, ta chứng minh

$$3\sqrt{x^4-x^2y^2+y^4}\geq x^2+xy+y^2$$
$$\Leftrightarrow 9x^4-9x^2y^2+9y^4\geq \left(x^2+xy+y^2\right)^2.$$
$$\Leftrightarrow (x-y)^2\left(4x^2+7xy+4y^2\right)\geq 0$$

Từ phương trình thứ hai của hệ suy ra $3-x\geq \sqrt{2(x^2+y^2)}$ (1).

Từ phương trình đầu của hệ sử dụng bất đẳng thức AM –GM ta có

$$x-y=6-6\sqrt{xy}\geq 6-3(x+y)\Rightarrow 2x+y\geq 3 \ (2).$$

Cộng theo vế của (1) và (2) ta được:

$$x+y\geq \sqrt{2(x^2+y^2)} \Leftrightarrow x=y\Rightarrow x=y=1.$$

Vậy nghiệm của hệ đã cho là $x=y=1$.

Ví dụ 8: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+\dfrac{2xy}{\sqrt[3]{x^2-2x+9}}=x^2+y \quad (1) \\ y+\dfrac{2xy}{\sqrt[3]{y^2-2y+9}}=y^2+x \quad (2) \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{Z})$

Ý tưởng: Đây là hệ phương trình đối xứng loại 2 nên nghiệm của bài toán sẽ là $x=y$ nhưng nếu làm theo cách thông thường thì sẽ rất khó khăn vì có sự xuất hiện của căn bậc 3. Chúng ta thử kết hợp 2 phương trình lại với nhau xem được như thế nào. Khi cộng 2 vế lại với nhau

thì vế trái xuất hiện $2xy$ và vế phải xuất hiện x^2+y^2 đến đây ta nghĩ tới việc đánh giá tiếp phương trình mới được hình thành đó.

Lời giải

Với $x=0\Rightarrow y=0$ thỏa mãn hệ phương trình.

Với $x,y\neq 0$. Cộng (1) và (2) vế theo vế ta được:

$$x+y+2xy\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2-2x+9}}+\frac{1}{\sqrt[3]{y^2-2y+9}}\right)=x^2+y^2+x+y$$

$$\Leftrightarrow 2xy\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2-2x+9}}+\frac{1}{\sqrt[3]{y^2-2y+9}}\right)=x^2+y^2 \quad (3)$$

Suy ra $xy>0$. Mặt khác ta có:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2-2x+9}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2+8}}\le\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{1}{\sqrt[3]{y^2-2y+9}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{(y-1)^2+8}}\le\dfrac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{x^2-2x+9}}+\frac{1}{\sqrt[3]{y^2-2y+9}}\le 1$$

$$\Rightarrow 2xy\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2-2x+9}}+\frac{1}{\sqrt[3]{y^2-2y+9}}\right)\le 2xy\le x^2+y^2 \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra $x=y=1$. Thử lại thỏa mãn.

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là: $(x;y)=(0;0),(1;1)$

Ví dụ 9: Giải hệ phương trình $\begin{cases}\dfrac{2x^2}{x^2+1}=y\\ \dfrac{2y^2}{y^2+1}=z\\ \dfrac{2z^2}{z^2+1}=x\end{cases} \quad (x,y,z\in\mathbb{Z})$

Lời giải

Ta thấy $x=y=z=0$ là 1 nghiệm của hệ phương trình.

Nếu $x,y,z\neq 0$ thì $x,y,z>0$ khi đó nhân 3 vế của hệ phương trình ta có:

$$\frac{8x^2y^2z^2}{(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)}=xyz\Leftrightarrow (x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)=8xyz$$

Áp dụng bất đẳng thức Cosi ta có:

$$\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)\left(z^2+1\right)\ge 2\sqrt{x^2}.2\sqrt{y^2}.2\sqrt{z^2}=8|xyz|=8xyz\quad (x,y,z>0)$$

Dấu bằng xảy ra khi $\Leftrightarrow \begin{cases} x,y,z>0 \\ x^2=y^2=z^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=1$ (thỏa mãn)

Vậy hệ phương trình có nghiệm là: $(x;y;z)=(0;0;0),(1;1;1)$

Ví dụ 10: Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x-1)^2+y^2=\sqrt[3]{x(2x+1)} \\ 3x^2-x+\dfrac{1}{2}=y\sqrt{x^2+x} \end{cases}$

Lời giải

Điều kiện: $x,y>0$

Ta có: HPT $\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2+y^2=\sqrt[3]{x(2x+1)} \\ 6x^2-2x+1=2y\sqrt{x^2+x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2+y^2=\sqrt[3]{x(2x+1)} \\ 5x^2+(x-1)^2=2y\sqrt{x^2+x} \end{cases}$

Mặt khác $\sqrt[3]{2.4x.(2x+1)}\le \dfrac{2x+1+4x+2}{3}=2x+1$

$$\Rightarrow (x-1)^2+y^2\le \frac{2x+1}{2} \Leftrightarrow 2x^2-4x+2+2y^2\le 2x+1 \Leftrightarrow 2x^2-6x+1+2y^2\le 0$$

Lại có theo cosi thì $5x^2+(x-1)^2=2y\sqrt{x^2+x}\le y^2+x^2+x \Leftrightarrow 5x^2-3x+1-y^2\le 0$

Kết hợp lại ta được:

$$2\left(5x^2-3x+1-y^2\right)+2x^2-6x+1+2y^2\le 0 \Leftrightarrow (2x-1)^2\le 0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\Rightarrow y=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $(x;y)=\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Ví dụ 11: Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{2}{x}-8x}+2\sqrt{1-2x}=\dfrac{y}{x}+\dfrac{1}{4xy} \\ 4x=\sqrt{2y+3}-\sqrt{y} \end{cases}$

Lời giải

Điều kiện: $y>0$, từ phương trình đầu $\Rightarrow 0<x\le \dfrac{1}{2}$.

Phương trình đầu tương đương: $\sqrt{2x\left(1-4x^2\right)}+2\sqrt{x^2(1-2x)}=y+\dfrac{1}{4y}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cosi ta có: $y+\frac{1}{4y}\ge 2\sqrt{y.\frac{1}{4y}}=1$.

Khi đó ta có:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{2x\left(1-4x^2\right)}+2\sqrt{x^2\left(1-2x\right)}\ge 1\\
&\Leftrightarrow \sqrt{2x\left(1-2x\right)}\left(\sqrt{1+2x}+\sqrt{2x}\right)\ge 1\\
&\Leftrightarrow \sqrt{2x\left(1-2x\right)}\ge \sqrt{1+2x}-\sqrt{2x}\\
&\Leftrightarrow 2x\left(1-2x\right)\ge 1+4x-2\sqrt{2x\left(1+2x\right)}\\
&\Leftrightarrow 4x^2+2x-2\sqrt{2x\left(1+2x\right)}+1\le 0\\
&\Leftrightarrow \left(\sqrt{2x\left(1+2x\right)}-1\right)^2\le 0\Leftrightarrow \sqrt{2x\left(1+2x\right)}=1\\
&\Leftrightarrow 2x\left(1+2x\right)=1\Leftrightarrow 4x^2+2x-1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}\\ x=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Đối chiếu điều kiện ta có: $x=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

Thử lại thỏa mãn. Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $\left(x;y\right)=\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4};\frac{1}{2}\right)$.

Ví dụ 12: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3+y^3=xy\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}\\ 4\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}=9\left(y-1\right)\sqrt{2x-2}\end{cases}$

Lời giải

Điều kiện: $x\ge 1$. Từ $PT^{(2)}\Rightarrow y\ge 1$

Thậm chí bạn biết rằng sử dụng BĐT đánh giá $PT^{(1)}$ thì việc làm được điều đó cũng sẽ mất không ít thời gian

Áp dụng BĐT Cauchy ta có: $x^3+y^3=\left(x+y\right)\left(x^2-xy+y^2\right)\ge 2\sqrt{xy}\left(x^2-xy+y^2\right)$

Mà $x^2-xy+y^2\ge \frac{1}{4}\left(x+y\right)^2\Leftrightarrow \left(x-y\right)^2\ge 0$ (luôn đúng)

Suy ra $x^3+y^3\ge 2\sqrt{xy}.\frac{\left(x+y\right)^2}{4}=\sqrt{xy}\sqrt{\frac{\left(x+y\right)^4}{4}}=\sqrt{xy}\sqrt{\frac{\left(x^2+y^2+2xy\right)^2}{4}}\ge$

$\ge \sqrt{xy}\sqrt{2xy\left(x^2+y^2\right)}=xy\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}$

Đẳng thức xảy ra nên $x=y$. Thay vào PT2 ta được:

$$4\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}=9(x-1)\sqrt{2x-2}$$

Ta có: $PT\Leftrightarrow 2\sqrt{2x+2\sqrt{(x-1)(x+1)}}=9(x-1)\sqrt{x-1}$

$\Leftrightarrow 2\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)=9(x-1)\sqrt{x-1}\Leftrightarrow 2\sqrt{x+1}=(9x-11)\sqrt{x-1}$

$\Leftrightarrow 4(x+1)=(9x-11)^2(x-1)\Leftrightarrow x=\dfrac{5}{3}$

Vậy HPT đã cho có nghiệm suy nhất $x=y=\dfrac{5}{3}$

***Ngoài cách trên, ta còn có một cách khác khá mới để đưa $PT^{(1)}$ ra $x=y$, khi nếu bạn gặp khó khăn (và thực sự là bạn sẽ gặp khó khăn) trong việc chứng minh từ $PT^{(1)}$, một ý tưởng đơn giản mà bản chất của nó là PP Liên hợp được gọi ra: ta cần nhân tử $(x-y)$, tạo như sau:

$PT^{(1)}\Leftrightarrow x^3+y^3-xy(x+y)=xy\left[\sqrt{2(x^2+y^2)}-(x+y)\right]$

$\Leftrightarrow (x-y)^2(x+y)=xy.\dfrac{2(x^2+y^2)-(x+y)^2}{\sqrt{2(x^2+y^2)}+(x+y)}\Leftrightarrow (x-y)^2(x+y)=\dfrac{(x-y)^2xy}{\sqrt{2(x^2+y^2)}+(x+y)}$

$\Leftrightarrow (x-y)^2\left[(x+y)-\dfrac{xy}{\sqrt{2(x^2+y^2)}+(x+y)}\right]=0$

Do $(x+y)^2\ge 4xy>xy$ (vì $x,y\ge 1$) $\Rightarrow x+y-\dfrac{xy}{\sqrt{2(x^2+y^2)}+(x+y)}>0$

Nên $x=y$.

Ví dụ 13: Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{(x^2+1)^3}-8x^3=2\sqrt{2y-1}-2^{(1)}\\ y^2+1=2\sqrt{-9x^3+3x+1}^{(2)}\end{cases}$

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases}y\ge\dfrac{1}{2}\\ -9x^3+3x+1\ge 0\end{cases}$

Từ $^{(1)}$ ta có: $VP(1)\le 2y-1+1-2=2y-2\le y^2+1-2=y^2-1$ mà

$y^2-1=2\sqrt{-9x^3+3x+1}-2\le -9x^3+3x+1++1-2=-9x^3+3x$ (từ $^{(2)}$)

$\Rightarrow \sqrt{(x^2+1)^3}-8x^3\le -9x^3+3x\Leftrightarrow \sqrt{(x^2+1)^3}\le -x^3+3x$

$\Leftrightarrow \begin{cases}-x^3+3x\ge 0(*)\\ (x^2+1)^3\le(-x^3+3x)^2(**)\end{cases}$

$(**)\Leftrightarrow x^6+3x^4+3x^2+1\le x^6-6x^4+9x^2\Leftrightarrow 9x^4-6x^2+1\le 0$

$\Leftrightarrow \left(3x^2-1\right)^2 \le 0 \Leftrightarrow \left(3x^2-1\right)^2 = 0 \Leftrightarrow 3x^2-1=0 \Leftrightarrow x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Kết hợp $(*)$ thấy $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ thỏa mãn. Khi đó: $y=1(t/m)$.

Vậy HPT có nghiệm: $(x;y)=\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}};1\right)$

Ví dụ 14: Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{4x-2y+9}+\sqrt{6y-2x+4}=5^{(1)}\\ x^2+y^2-2x-4y+1=0^{(2)}\end{cases}$

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases}4x-2y+9\ge 0\\ 6y-2x+4\ge 0\end{cases}$

Từ (2) ta có: $\begin{cases}4x-2y+9=(x+1)^2+(3-y)^2\\ 6y-2x+4=(2-x)^2+(y+1)^2\end{cases}$.

thay vào $^{(1)}$ ta được:

$\sqrt{(x+1)^2+(3-y)^2}+\sqrt{(2-x)^2+(y+1)^2}=5(*)$

Đặt $\vec{u}=(x+1;3-y)$ và $\vec{v}=(2-x;y+1)$ ta có: $\vec{u}+\vec{v}=(3;4)$.

Sử dụng BĐT $|\vec{u}|+|\vec{v}|\ge|\vec{u}+\vec{v}|$ ta được:

$\sqrt{(x+1)^2+(3-y)^2}+\sqrt{(2-x)^2+(y+1)^2}\ge\sqrt{3^2+4^2}\Rightarrow VT(*)\ge VP(*)$.

nên $(*)$ xảy ra khi và chỉ khi $\vec{u}=k\vec{v}(k>0)\Leftrightarrow\dfrac{x+1}{2-x}=\dfrac{3-y}{y+1}\Leftrightarrow 4x+3y=5\Leftrightarrow y=\dfrac{5-4x}{3}$.

Thay vào (2) ta có: $x^2+\left(\dfrac{5-4x}{3}\right)^2-2x-4\left(\dfrac{5-4x}{3}\right)+1=0$.

$\Leftrightarrow 25x^2+10x-26=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{3\sqrt{3}-1}{5}\\ x=-\dfrac{3\sqrt{3}+1}{5}\end{array}\right.$.

** Với $x=\dfrac{3\sqrt{3}-1}{5}\Rightarrow y=\dfrac{29-12\sqrt{3}}{15}$ (t/m ĐK)

** Với $x=-\dfrac{3\sqrt{3}+1}{5}\Rightarrow y=\dfrac{21+12\sqrt{3}}{15}$ (t/m ĐK)

Vậy HPT có nghiệm $(x;y)=\left(\dfrac{3\sqrt{3}-1}{5};\dfrac{29-12\sqrt{3}}{15}\right);\left(-\dfrac{3\sqrt{3}+1}{5};\dfrac{21+12\sqrt{3}}{15}\right)$

Ví dụ 15: Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^2-x+2=2\sqrt{-y^2+5y-5}^{(1)}\\ -x+y+3=2\sqrt{-2y^2+8y-4}^{(2)}\end{cases}$

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} -y^2+5y-5\ge 0 \\ -2y^2+8y-4\ge 0 \end{cases}$

Một dạng hệ đáng lưu ý:

Từ $^{(1)}$ ta có: $x^2-x+2=2\sqrt{-y^2+5y-5}\le -y^2+5y-5+1 \Rightarrow x^2+y^2-x-5y+6\le 0^{(*)}$

Từ $^{(2)}$ ta có: $-x+y+3=2\sqrt{-2y^2+8y-4}\le \dfrac{-2y^2+8y-4+4}{2}=-y^2+4y$

$\Rightarrow y^2-x-3y+3\le 0^{(**)}$

Cộng vế theo vế các BĐT $^{(*)}$ và $^{(**)}$ ta được:

$x^2+2y^2-2x-8y+9\le 0 \Leftrightarrow (x-1)^2+2(y-2)^2\le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$

Thử lại: t/m

Vậy HPT có nghiệm $(x;y)=(1;2)$

***Một bài HPT đánh giá khó có 2 loại, một loại dựa vào quan hệ tương đối về giá trị của các biến, tức là bạn phải dựa cào giá trị đặc biệt của biến trong hệ để đánh giá, dạng thứ 2 là những hệ chế tác từ BĐT, chúng thường dễ phân biệt nhưng khó chứng minh, nhất là những bài toán được chế tác rất uyển chuyển, khó đoán, để minh họa, tôi xin lấy vd:

Ví dụ 16: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \left(\sqrt{b(3-a^2-b)}-a\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{b}-a\right)+(3-a^2)a=2 \\ a^2+b^2+\sqrt{a}=3b \end{cases}$

Lời giải

Một bài toán sử dụng PP đánh giá rất đặc sắc:

Điều kiện: $a\ge 0;\ b\ge 0$.

Ta sẽ làm việc với $PT^{(1)}$. Nhận thấy một dấu hiệu rất đặc biệt: $\sqrt{b(3-a^2-b)}$ và $(3-a^2)a$

Nên ra sẽ bung PT ra và ghép để có $(3-a^2-b)a$ và đặc lượng $\sqrt{3-a^2-b}$, và khi đó, bài toán thực sự bắt đầu.

Đặt $a=x,\ \sqrt{b}=y$

Biến đổi $PT^{(1)} \Leftrightarrow \left(y\sqrt{3-x^2-y^2}-xy\right)(y-x)+(3-x^2)x=2$

$\Leftrightarrow x^2y+y^2\sqrt{3-x^2-y^2}+(3-x^2-y^2)x-xy\sqrt{3-x^2-y^2}$

Đặt $\sqrt{3-a-b}=z \Rightarrow x^2y+y^2z+z^2x-xyz=2$ với $x^2+y^2+z^2=3$

Ta sẽ chứng minh: $P=x^2y+y^2z+z^2x-xyz\le 2$ với $x,y,z\ge 0$ và $x^2+y^2+z^2=3$. Thật vậy:

Thật vậy:

Giả sử $x \ge y \ge z$. Ta có: $z(x-y)(y-z) \ge 0 \Leftrightarrow yz^2 \ge y^2z + z^2x - xyz$

$$\Rightarrow P \le y\left(z^2+x^2\right) = y\left(3-y^2\right) = \sqrt{y^2\left(3-y^2\right)} = 2\sqrt{y^2.\frac{3-y^2}{2}.\frac{3-y^2}{2}} \le$$

$$\le 2\sqrt{\frac{\left(y^2+\frac{3-y^2}{2}+\frac{3-y^2}{2}\right)^3}{27}} = 2$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1 \Rightarrow a = b = 1$

Vậy HPT có nghiệm duy nhất $a = b = 1$

Ví dụ 17: Giải Hệ phương trình: $\begin{cases} \frac{x}{y}+\frac{y}{2}+\frac{2}{x} = \frac{x+3}{y+3}+\frac{y+3}{5}+\frac{5}{x+3} \\ x^3+\sqrt{x}-\sqrt{y} = 8 \end{cases}$

Lời giải

Điều kiện: $x, y \ge 0$

Ta sẽ chứng minh một kết quả tổng quát, một kết quả rất thường được sử dụng vào chế tác HPT với phương thức đánh giá, sau đây tôi xin giới thiệu một cách rất nhanh, rất đơn giản:

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x} \ge \frac{x+k}{y+k}+\frac{y+k}{z+k}+\frac{z+k}{x+k}$$

Sử dụng phương pháp $S-S$:

Không mất tính tổng quát, giả sử $z = \min\{x, y, z\}$

Ta có: $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}-3 = \frac{(x-y)^2}{xy}+\frac{(x-z)(y-z)}{zx}$

Và $\frac{x+k}{y+k}+\frac{y+k}{z+k}+\frac{z+k}{x+k}-3 = \frac{(x-y)^2}{(x+k)(y+k)}+\frac{(x-z)(y-z)}{(x+k)(z+k)}$

BĐT cần chứng minh

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{xy}-\frac{1}{(x+k)(y+k)}\right)(x-y)^2+\left(\frac{1}{zx}-\frac{1}{(x+k)(z+k)}\right)(x-z)(y-z) \ge 0$$

Theo giả thiết ta có $(x-z)(y-z) \ge 0$

Ta có: $\frac{1}{xy}-\frac{1}{(x+k)(y+k)} \ge 0$ và $\frac{1}{zx}-\frac{1}{(x+k)(z+k)} \ge 0 \ \forall k \ge 0$

Từ đó BĐT được chứng minh!

Áp dụng trực tiếp vào bài toán suy ra $x = y = 2$

Vậy HPT có nghiệm duy nhất $x = y = 2$

Ví dụ 18: Giải hệ PT: $\begin{cases} \sqrt{\left(x^2+1\right)^3}-8x^3 = 2\sqrt{2y-1}-2 \\ y^2+1 = 2\sqrt{-9x^3+3x+1} \end{cases}$

Lời giải

Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$$\sqrt{(x^2+1)^3}-8x^3=2.1\sqrt{2y-1}-2\le\frac{2(1+(\sqrt{2y-1})^2)}{2}-2=2y-2$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{(x^2+1)^3}-8x^3-2y+2\le 0^{(1)}$$

$$y^2+1=2.1.\sqrt{-9x^3+3x+1}\le\frac{2(1+(\sqrt{-9x^3+3x+1})^2)}{2}=-9x^3+3x+2$$

$$\Leftrightarrow 9x^3-3x+y^2-1\le 0^{(2)}$$

Lấy (1) cộng (2): $\Leftrightarrow x^3-3x+\sqrt{(x^2+1)^3}+y^2-2y+1\le 0^{(3)}$

Xét $f(x)=x^3-3x+\sqrt{(x^2+1)^3}$ có $f'(x)=3x^2-3+\frac{3}{2}\sqrt{x^2+1}.2x=0$

$$\Leftrightarrow (x^2-1)^2=x^2(x^2+1)\Leftrightarrow -2x^2+1=x^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{\sqrt{3}}(\text{nhân})\\ x=-\frac{1}{\sqrt{3}}(\text{loai})\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow f(x)\ge f\left(\frac{1}{3}\right)=0\Leftrightarrow VT^{(3)}\ge 0$$

Vậy HPT có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(\frac{1}{\sqrt{3}};1\right)$

Ví dụ 19: Giải hệ phương trình : $\begin{cases}y^2+(4x-1)^2=\sqrt[3]{4x(8x+1)}\\ 40x^2+x=y\sqrt{14x-1}\end{cases}$

Lời giải

Điều kiện : $x\ge\frac{1}{14}$

HPT đã cho được viết lại thành: $\begin{cases}y^2+16x^2-8x+1=\sqrt[3]{4x(8x+1)}\\ 80x^2+2x=2y\sqrt{14x-1}\end{cases}$

Cộng vế theo vế hai phương trình ta được :

$$(y^2-2y\sqrt{14x-1}+14x-1)+96x^2-20x+2=\sqrt[3]{4x(8x+1)}$$

$$\Leftrightarrow(y-\sqrt{14x-1})^2+96x^2-20x+2=\sqrt[3]{4x(8x+1)}^{(1)}$$

Ta có : $VT^{(1)}\ge 96x^2-20x+2=\frac{1}{2}\left[3(8x-1)^2+8x+1\right]\ge\frac{1}{2}(8x+1)$

$$=\frac{1}{6}(16x+8x+1+2)\ge\frac{1}{2}\sqrt[3]{16x(8x+1).2}=\sqrt[3]{4x(8x+1)}=VP(1)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(x;y)=\left(\frac{1}{8};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Ví dụ 20: Giải hệ phương trình $\begin{cases} 4x = \sqrt{4y+3} - \sqrt{2y} \\ \sqrt{\dfrac{2}{x} - 8x} + 2\sqrt{1-2x} = \dfrac{y}{x} + \dfrac{1}{4xy} \end{cases}$

Lời giải

Điều kiện: $y \geq 0;\ x \neq 0;\ x \leq \dfrac{1}{2};\ \dfrac{2}{x} - 8x \geq 0$

Ta có: $PT^{(1)} \Leftrightarrow 4x = \dfrac{2y+3}{\sqrt{4y+3} + \sqrt{2y}} \Rightarrow x > 0$

Áp dụng BĐT Cauchy ta có: $VT^{(2)} = \sqrt{\dfrac{2}{x} - 8x} + 2\sqrt{1-2x} = \dfrac{1}{2}.2.\sqrt{\dfrac{2}{x} - 8x} + 2\sqrt{2x\left(\dfrac{1}{2x} - 1\right)} \leq$

$\leq \dfrac{1}{4}\left(4 + \left(\dfrac{2}{x} - 8x\right)\right) + 2x + \left(\dfrac{1}{2x} - 1\right) = \dfrac{1}{x}$ mà $VP^{(2)} = \dfrac{y}{x} + \dfrac{1}{4xy} \geq 2\sqrt{\dfrac{y}{x}.\dfrac{1}{4xy}} = \dfrac{1}{x}$

$\Rightarrow VT \geq VP$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4} \Rightarrow y = \dfrac{1}{2}$

Vậy HPT có nghiệm duy nhất $(x;y) = \left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}; \dfrac{1}{2}\right)$

Ví dụ 21: Giải HPT:

$$\begin{cases} x\sqrt{8y-5} + y\sqrt{8x-5} = \sqrt[4]{24\left(x^2+y^2+4\right)} \\ 11x^2 - 6xy + 3y^2 = 12 - x - 4 \end{cases}$$

Lời giải

Biến đổi PT2 ta được:

$PT^{(2)} \Leftrightarrow (3x-y-2)^2 + 2\left(x^2+y^2\right) = 4 \Rightarrow 2\left(x^2+y^2\right) \leq 4 \Rightarrow x^2+y^2 \leq 2^{(*)}$

Suy ra $2 \geq x^2+y^2 \geq \dfrac{1}{2}(x+y)^2 \Rightarrow x+y \leq 2$

Áp dụng BĐT Cauchy – Schwarz ta có:

$$x\sqrt{8y-5} + y\sqrt{8x-5} \leq \sqrt{\left(x^2+y^2\right)(8y-5+8x-5)} \leq \sqrt{6\left(x^2+y^2\right)} \text{ (vì } x+y \leq 2\text{)}$$

Từ $PT^{(1)} \Rightarrow \sqrt[4]{24\left(x^2+y^2+4\right)} \leq \sqrt{6\left(x^2+y^2\right)} \Leftrightarrow 24\left(x^2+y^2+4\right) \leq 36\left(x^2+y^2\right)^2$

$\Leftrightarrow \left(x^2+y^2-2\right)\left[3\left(x^2+y^2\right)+4\right] \geq 0 \Leftrightarrow x^2+y^2 \geq 2$. Kết hợp $^{(*)} \Rightarrow x^2+y^2 = 2$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x = y = 1$

Ví dụ 22: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2\sqrt{2(x-3)}+(x+1)(y-1)=\sqrt[3]{3x-\dfrac{1}{2}}^{(1)} \\ \sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{y^2-y+1}=\sqrt{x^2-xy+y^2}^{(2)} \end{cases}$

Lời giải

Điều kiện: $x \geq 3$

Đây là bài toán chào mừng ngày 20 – 11 của trường THPT chuyên Hà Tĩnh, và nhìn vào dạng của phương trình (2) ta nghĩ ngay đến việc sử dụng BĐT Véc-tơ. Đó là những kĩ thuật về mặt phản xạ:

Cách 1: Áp dụng BĐT Véc-tơ ta có:

$$\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{y^2-y+1}=\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{1}{2}-y\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\geq\sqrt{(1+x-y)^2+3}$$

Từ $PT(2)\Rightarrow\sqrt{x^2-xy+y^2}\geq\sqrt{(1+x-y)^2+3}$

$\Leftrightarrow x^2-xy+y^2\geq x^2+y^2+4+2x-2y-2xy\Leftrightarrow xy-2x+2y-4\geq 0\Leftrightarrow(x+1)(y-2)\geq 0$

Mà $x\geq 3\Rightarrow y\geq 2$. Khi đó: $VT(1)\geq x+1$

Áp dụng BĐT Cauchy ta có: $x+1=\frac{1}{3}\left[(3x+1)+1+1\right]\geq\frac{1}{3}.3\sqrt[3]{(3x+1).1.1}=\sqrt[3]{3x+1}$

Suy ra $VT(1)\geq x+1\geq\sqrt[3]{3x+1}>\sqrt[3]{3x-\frac{1}{2}}=VP(1)$

Suy ra PTVN

Cách 2: Tôi sẽ tiến hành đánh giá nghiệm của HPT trên, đây là một phương án khá tối ưu cho hệ dạng "nửa"

Từ PT(2)$\Rightarrow\left(x^2+x+1\right)+\left(y^2-y+1\right)+2\sqrt{x^2+x+1}.\sqrt{y^2-y+1}=x^2-xy+y^2$

$\Rightarrow x-y+xy+2+2\sqrt{x^2+x+1}.\sqrt{y^2-y+1}=0$

$\Rightarrow x-y+xy+2\leq 0\Rightarrow(x-1)(y+1)<0$

Mà $x\geq 3\Rightarrow x-1>0\Rightarrow y+1<0\Rightarrow y<0\Rightarrow(x+1)(y-1)<0^{(1)}$

Cũng từ PT(2)$\Rightarrow\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)+\left(\sqrt{y^2-y+1}+y\right)=\sqrt{x^2-xy+y^2}-(x-y)$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(x^2+x+1\right)-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}+x}+\frac{\left(y^2-y+1\right)-y^2}{\sqrt{y^2-y+1}+y}=\frac{\left(x^2-xy+y^2\right)-\left(x^2-2xy+y^2\right)}{\sqrt{x^2-xy+y^2}+(x-y)}$$

$$\Leftrightarrow\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x}+\frac{1-y}{\sqrt{y^2-y+1}+y}=\frac{xy}{\sqrt{x^2-xy+y^2}+(x-y)}$$

Do $x>0$ và $y<0\Rightarrow\sqrt{y^2-y+1}>\sqrt{y^2}=|y|\geq y\Rightarrow\sqrt{y^2-y+1}+y>0$ và dễ thấy:

$\sqrt{x^2+x+1}+x>0;\ \sqrt{x^2-xy+y^2}+(x-y)>0;\ xy<0$

Từ đó suy ra $(x+1)(1-y)<0^{(2)}$

Từ (1) và (2) suy ra PTVN!

Tuy nhiên đánh giá ra kết quả (2) chỉ là một ý nghĩ trực quan của tôi lúc đánh giá nghiệm, trông thì khá cồng kềnh nhưng nó rất tự nhiên. Nếu kết hợp với kết quả từ sử dụng BĐT Véc-tơ thì sẽ cho ra một đánh giá đẹp hơn: $y \ge 2$ và $y < 0$. Đó là mấu chốt của bài toán!

Nhận tiện đây, với dạng PT như PT2 ta còn có một hướng đi, triệt để hơn nhiều nhưng nếu ko cần thiết quá thì ko nên dùng đến:

Ví dụ 23: Giải Hệ phương trình: $\begin{cases} 6(x-1)-(2x-3)\sqrt{2y}=2y\sqrt{x-1} \\ \sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{y^2-y+1}=\sqrt{x^2+xy+y^2} \end{cases}$

Lời giải

Bình thường sử dụng BĐT véc-tơ để đánh giá qua nghiệm, nghiệm duy nhất $(x;y)=(2;2)$, từ đó suy ra $(x-2)(y-2)\le 0$. Vì vậy sẽ cố gắng đánh giá $(x-2)(y-2)\ge 0$ qua PT1, có thể đặt lại ẩn cho $\sqrt{x-1}$ và $\sqrt{2y}$ cho đẹp chẳng hạn. Tuy nhiên PT1 chỉ suy ra được $y \ge 2$ và cũng tồn tại nghiệm $x < 2$ nên ko thể đánh giá qua nghiệm. Khi đó mới sử dụng kết quả sau, mạnh hơn nếu cần:

Điều kiện: $x \ge 1$

Ta có: PT2 $\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2-x+1}\sqrt{y^2-y+1}=xy+x+y-2^{(*)}$ $(xy+x+y-2\ge 0)$

Đặt $\begin{cases} xy=a \\ x+y=b \end{cases}$ ta được:

$$\text{PT}^{(*)} \Leftrightarrow 2\sqrt{a^2+b^2-2a-ab+a-b+1}=a+b-2$$

$$\Leftrightarrow 4\left(a^2+b^2-ab-a-b+1\right)=(a+b-2)^2 \Leftrightarrow 3(a-b)^2=0 \Leftrightarrow a=b \Leftrightarrow xy=x+y$$

Dễ thấy $x=1$ không phải nghiệm của hệ! Xét $x\ne 1$: Từ đó ta có: $y=\dfrac{x}{x-1}$

Thay vào PT1 ta được: $6(x-1)-(2x-3)\sqrt{\dfrac{2x}{x-1}}=\dfrac{2x\sqrt{x-1}}{x-1}$

$$\text{PT} \Leftrightarrow 6(x-1)\sqrt{x-1}-(2x-3)\sqrt{2x}=2x \Leftrightarrow 6(x-1)\left(\sqrt{x-1}-1\right)=(2x-3)\left(\sqrt{2x}-2\right)$$

$$\Leftrightarrow 6(x-1)\frac{x-2}{\sqrt{x-1}+1}=(2x-3)\frac{2(x-2)}{\sqrt{2x}+2} \Leftrightarrow (x-2)\left(\frac{6(x-1)}{\sqrt{x-1}+1}-\frac{2(2x-3)}{\sqrt{2x}+2}\right)=0$$

Ta có: $x\ge 1$ nên $0<\sqrt{x-1}+1<\sqrt{2x}+2$ và $6(x-1)>2(2x-3)$ và $6(x-1)\ge 0$

Nên $\dfrac{6(x-1)}{\sqrt{x-1}+1}>\dfrac{2(2x-3)}{\sqrt{2x}+2}$ $\forall x\ge 1$

Từ đó $x=2 \Rightarrow y=2$

Vậy HPT đã cho có nghiệm $(x;y)=(2;2)$

Ví dụ 24: Giải hệ PT: $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y-1}+\sqrt{x-y}=\sqrt{5}\\ \left|(x-y+1)(x-2y+1)y\right|=\sqrt{5}\end{cases}$

Lời giải

Điều kiện: $x\ge y\ge 1$.

Đặt $\sqrt{x}=a;\sqrt{y-1}=b;\sqrt{x-y}=c$, HPT đã cho trở thành:

$$\begin{cases}a,b,c\ge 0\\ a+b+c=\sqrt{5}\\ \left|(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)\right|=\sqrt{5}^{(*)}\end{cases}$$

Giả sử c = min{a,b,c}. Khi đó ta có:

$a+b=\sqrt{5}-c\le\sqrt{5}$. Đặt $P=\left|(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)\right|$, ta sẽ chứng minh $P\le 5$. Thật vậy:

Áp dụng BĐT Cauchy ta có:

$P^2=(a^2-b^2)^2(b^2-c^2)^2(c^2-a^2)^2\le a^4b^4(a-b)^2(a+b)^2\le 5a^4b^4(a-b)^2\le$

$\le 5.\left[\dfrac{4.ab+(a-b)^2}{5}\right]^5\le 5\left[\dfrac{(a+b)^2}{5}\right]^5\le 5\Rightarrow P\le\sqrt{5}$.

Dấu "=" xảy ra nên $(a;b;c)=\left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2};\dfrac{\sqrt{5}-1}{2};0\right)$. Thử lại thấy không t/m.

Vậy HPT Vô nghiệm

Bài tập bổ sung:

1. Giải hệ phương trình $\begin{cases}a+b=\sqrt[3]{24}\\ \left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{a+3b}}+\dfrac{1}{\sqrt{3a+b}}\right)=2\end{cases}$ $(x\in\mathbb{Z})$

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt[4]{32-x}-y^2=-3\\ \sqrt[4]{x}+\sqrt{32-x}+6y=24\end{cases}$ $(x\in\mathbb{Z})$

3. Giải hệ phương trình $\begin{cases}y=-x^3+3x+4\\ x=2y^3-6y-2\end{cases}$ $(x\in\mathbb{Z})$

4. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{8-xy^2\left(xy^2+2\right)} = x^6+x^3y^3+\dfrac{1}{2} \\ -\sqrt{x^2+y^2+2\left(xy+2\right)} = y^6+x^3y^3+\dfrac{1}{2} \end{cases}$ $\left(x\in\mathbb{Z}\right)$

5. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x\left(x-3\right)^3 = 2+\sqrt{y^3+3y} \\ 3\sqrt{x-3} = \sqrt{y^2+8y} \end{cases}$ $\left(x,y\in\mathbb{Z}\right)$

6. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+xy = 3y^2-y\sqrt{xy} \\ \dfrac{y^2}{1+\sqrt{2-x}}+\dfrac{\left(2-x\right)^2}{1+y} = 1 \end{cases}$ $\left(x\in\mathbb{Z}\right)$

7. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{2x^2+4y^2}{xy} = 4\sqrt{\left(\dfrac{2}{y}-\dfrac{3}{x}\right)\left(x+y\right)-1} \\ \sqrt{\left(x+1\right)^2+xy+3x+2y+5-2x\sqrt{x\left(y+3\right)}} = \sqrt{x}+\sqrt{y+3} \end{cases} \quad \left(x,y\in\mathbb{Z}\right)$$

8. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x\sqrt{8y-5}+y\sqrt{8x-5} = \sqrt[4]{24\left(x^2+y^2+4\right)} \\ 11x^2-6xy+3y^2 = 12x-4y \end{cases}$ $\left(x,y\in\mathbb{Z}\right)$khó)